Rechnernutzung in der Physik

Institut für Experimentelle Teilchenphysik
Institut für Theoretische Teilchenphysik
Interfakultatives Institut für Anwendungen der Informatik

Prof. Dr. G. Quast, Prof. Dr. M. Steinhauser
Dr. A. Mildenberger, Dr. T. Chwalek
`http://comp.physik.kit.edu`

WS2018/19 – Blatt 04
Bearbeitungszeitraum: bis Di, 27.11.2018

Aufgabe 7: Harmonische Polylogarithmen (HPL) (*)

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'[z] = \frac{\texttt{PolyLog}[3,z]}{z(1+z)(1-z)} - \frac{y[z]}{z}\,, \qquad -1 < z < 1$$

mit $\texttt{PolyLog}[3,z] = \mathrm{HPL}[\{3\},z]$, wobei die Harmonischen Polylogarithmen in der Vorlesung eingeführt wurden. `PolyLog` ist eine in Mathematica implementierte Funktion, wohingegen für die HPL's das Paket HPL (siehe Webseite zur Vorlesung und Vorlesungsbeispiel) geladen werden muss, um mit diesen arbeiten zu können. Diese DGL kann nicht mehr mit Hilfe von `DSolve` bzw. elementaren Funktionen gelöst werden.

(a) Implementieren Sie in `Mathematica` eine Routine, welche diese DGL mit Hilfe des Euler-Verfahrens löst. Lösen Sie dazu zuerst den homogenen Teil der DGL und führen Sie dann eine Variation der Konstanten durch. Beachten Sie dabei, dass `Mathematica` — auch mit Hilfe des Paketes HPL — nur in der Lage ist, die HPL's in ihrer "Standardform" zu integrieren, wie z.B.:

$$\texttt{Integrate}\left[\frac{\mathrm{HPL}[\{2,-1\},z]}{(1-z)},\{z,0,zz\}\right].$$

Um kompliziertere Terme zu integrieren führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch und verwenden sie Ersetzungsregeln der Form

$$\frac{\mathrm{HPL}[n\_,zz\_]}{(1+zz\_)} \quad -> \quad \texttt{Integrate}\left[\frac{\mathrm{HPL}[n,zz]}{(1+zz)},\{zz,0,z\}\right].$$

Bestimmen Sie die Integrationskonstate durch die Forderung, dass die Lösung der DGL bei $z=0$ endlich bleibt.

(b) Lösen Sie die DGL diesmal mit Hilfe einer Entwicklung um $z=0$. Setzen Sie für $y[z]$ folgende Potenzreihe an:

$$y[z] = \sum_{i=0}^{i_{\max}} c_i z^i$$

und lösen Sie die resultierende DGL Ordnung für Ordnung in z. Plotten Sie die exakte Lösung aus (a) gegen die entwickelten Lösungen mit $i_{\max} = 2, 10, 50$ und vergleichen Sie diese.

Hinweis: Folgende `Mathematica`-Befehle erweisen sich in dieser Aufgabe als nützlich: `Apart, Sum, Series, Table, Solve`.

Aufgabe 8: Numerische Integration

In der Datei `a8-expr.m` finden Sie einen Ausdruck, der nur von der Variablen `w` abhängt. Berechnen Sie das Integral über diese Funktion zwischen `w`=0 und `w`=1 auf folgende Art und Weise:

(a) Benutzen Sie `NIntegrate[]`.

(b) Setzen Sie die Funktion auf ein Gitter mit Abstand Δ`w`=0.02, interpolieren Sie diese und integrieren sie die Interpolationsfunktion.

(c) Subtrahieren Sie zunächst die Divergenz bei `w`=0 mit Hilfe des Pakets HPL (siehe Aufgabe 7) und verfahren Sie dann wie in (b). Integrieren Sie die Divergenz analytisch.

Vergleichen Sie die Rechenzeiten der numerischen Integrationen (z. B. mit `Timing[]`) sowie die Genauigkeit der Ergebnisse aus den Verfahren (b) und (c) relativ zum "exakten" Ergebnis (a).

Hinweis: Mit dem Rechnernamen `fphctssh.physik.uni-karlsruhe.de` können Sie von überall aus mittels `ssh/scp` auf einen Poolrechner zugreifen und den `Mathematica` Kernel nutzen.