Rechnernutzung in der Physik

Institut für Experimentelle Teilchenphysik
Institut für Theoretische Teilchenphysik
Interfakultatives Institut für Anwendungen der Informatik

Prof. Dr. G. Quast, Prof. Dr. M. Steinhauser
Dr. A. Mildenberger, Dr. T. Chwalek
`http://comp.physik.kit.edu`

WS2018/19 – Blatt 02
Bearbeitungszeitraum: bis Di, 13.11.2018

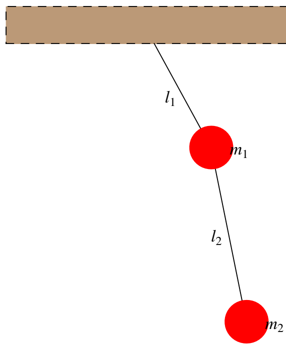
Aufgabe 3: Doppelpendel (*)

Betrachten Sie ein (mathematisches) Doppelpendel mit Massen m_1 und m_2 und Fadenlängen l_1 und l_2 (siehe Skizze). Die unabhängigen Variablen sind die Auslenkwinkel ϕ_1 und ϕ_2, die folgendem System von gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung gehorchen:

$$
\begin{aligned}
(m_1+m_2)\left[l_1^2\ddot{\phi}_1 + g l_1 \sin(\phi_1)\right] + m_2 l_1 l_2 \left[\ddot{\phi}_2\cos(\phi_1-\phi_2) + (\dot{\phi}_2)^2\sin(\phi_1-\phi_2)\right] &= 0, \qquad (1)\\
m_2 l_2\left[l_2\ddot{\phi}_2 + l_1\ddot{\phi}_1\cos(\phi_1-\phi_2) - l_1(\dot{\phi}_1)^2\sin(\phi_1-\phi_2) + g\sin(\phi_2)\right] &= 0. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Wählen Sie der Einfachheit halber $g = 1$, $l_1 = 2$ und $l_2 = 3$.

(a) Lösen Sie die Differentialgleichungen für die Anfangsbedingungen $\phi_1(0) = \phi_1^0$, $\phi_2(0) = \phi_2^0$, $\dot{\phi}_1(0) = 0$ und $\dot{\phi}_2(0) = 0$ mit Hilfe des Befehls `NDSolve`. Stellen Sie die Lösungen $\phi_1(t)$ und $\phi_2(t)$ für t zwischen 0 und 60 graphisch dar. Wählen Sie dabei verschiedene Werte für ϕ_1^0 und ϕ_2^0 und betrachten Sie u.a. die Grenzfälle großer und kleiner Werte von m_1/m_2.



(b) Stellen Sie Ihre Lösung auch in Form eines animierten Pendels graphisch dar. Sie können sich dabei an dem entsprechenden Vorlesungsbeispiel orientieren.

(c) Wie sehen die Differentialgleichungen in (1) und (2) im Grenzfall kleiner Winkel ϕ_1 und ϕ_2 aus? Untersuchen Sie „experimentell“, für welche numerischen Werte von ϕ_1^0 und ϕ_2^0 die Approximation gut ist. Schauen Sie sich dabei sowohl $\phi_1(t)$ und $\phi_2(t)$ als auch die Animation für die exakte Lösung und die Approximation an.

(d) Erstellen Sie zu einer möglichst interessanten Pendelkonfiguration alle 5 Sekunden eine Momentaufnahme. Exportieren Sie deren gemeinsame Darstellung als maximal eine `.pdf`-Seite.

Hinweis: Folgende `Mathematica`-Befehle erweisen sich in dieser Aufgabe als nützlich: `D`, `NDSolve`, `Line`, `Animate`, `Graphics`, `Export` und `GraphicsGrid`.

Aufgabe 4: Nullstellen mit dem Newton-Verfahren

Eine effektive Methode, Nullstellen einer Funktion $f(x)$ zu berechnen, ist das Newton-Verfahren, das folgendermaßen definiert ist: Nach der Wahl eines Startwertes x_0 erhält man x_i $(i = 1, 2, \dots)$ mittels

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Bei geeigneter Vorgabe von x_0 konvergiert x_i für $i \to \infty$ gegen eine Nullstelle von $f(x)$.

(a) Schreiben Sie eine Funktion (oder `Module`) mit dem Namen `MyRoots`, die eine Funktion und den Startpunkt als Parameter übernimmt. Außerdem soll es möglich sein, Parameter vorzugeben, die die Genauigkeit bzw. die maximalen Iterationsschritte festlegen. Fehlermeldungen, falls keine Nullstelle existiert oder das Verfahren nicht konvergiert, sollen auf dem Bildschirm ausgegeben werden.

(b) Finden Sie (falls möglich) alle Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2(x - 2)$ mit Hilfe von `MyRoots`, sowie unter Verwendung der `Mathematica` Routinen `FindRoot` und `Solve`.

(c) Wiederholen Sie (b) mit $f(x) = x^2(x - 2) + 0.1 \sin(100\,x)$. Es ist hilfreich, die Funktion graphisch darzustellen, um geeignete Startwerte zu finden.

(d) Schreiben Sie `MyRoots` so um, dass es nicht zwingend ist, die Parameter, die die Präzision und Schrittweite festlegen, anzugeben. Wählen Sie für diesen Fall vernünftige Standardwerte. Schauen Sie sich dazu die Hilfeseiten zu `Options` an.

Hinweis: Mit dem Rechnernamen `fphctssh.physik.uni-karlsruhe.de` können Sie von überall aus mittels `ssh/scp` auf einen Poolrechner zugreifen und den `Mathematica` Kernel nutzen.

Das Passwort für den Online-Status von Testaten und Auswertungen auf der Kurswebseite ist `tensor` (klein geschrieben).
