Karlsruher Institut für Technologie | SS 2022
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Dr. Andreas Poenicke | **07.04.2022**
http://comp.physik.kit.edu/Lehre/ERA/ | era@physik.kit.edu

Übungsblatt zur Vorlesung „Einführung in das Rechnergestützte Arbeiten: Maple“

Wollen Sie die gleiche Arbeitsumgebung wie in der Vorlesung, so starten Sie Maple und wählen Sie „Worksheet mode“. Stellen Sie zusätzlich unter „Tools“ → „Options“ in dem Tab „Display“ den ersten Punkt „Input display:“ auf „Maple Notation“. Bestätigen Sie nun mit einem Klick auf den Button „Apply globally“.
Im Folgenden wird `expr` stets als Platzhalter für einen beliebigen Mapleausdruck stehen.
Hilfe zu Maplebefehlen bekommen Sie mit einem vorangestellten Fragezeichen, z.B. öffnet `?int` die Hilfe zum Integrationsbefehl.

1D-Plots, Differenzieren, Integrieren und analytische Umformung von Ausdrücken

Manche der folgenden Umformungen kann Maple automatisch mit `simplify` ausführen, aber leider nicht alle. Diese Übung soll Ihnen zeigen, wie Maple mit etwas Unterstützung analytische Umformungen mathematischer Ausdrücke vornehmen kann.

$\boxed{1}$ Bearbeiten Sie **Aufgabe I** mit den Befehlen `plot`, `diff` und `int`. Viele naheliegende Umformungen vor und nach dem Integrieren/Differenzieren nimmt Maple mit `simplify` vor.
Bei Teilaufgabe **B**)iv) hilft `combine(%,trig)` nach dem Ableiten.

Aufgabe I

A) Skizzieren Sie die folgenden Funktionen:

$$\text{(i)}\quad f(x) = \sinh(x) \qquad \text{(ii)}\quad f(x) = \ln|x| \qquad \text{(iii)}\quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

B) Berechnen Sie:

$$\text{(i)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{n \ln x} \qquad \text{(ii)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} a^{x^2} \qquad \text{(iii)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\tan\theta \cdot \cos\theta\right) \qquad \text{(iv)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\sin^2\left(x^2+a\right)\right)$$

C) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\text{(i)}\quad \int \mathrm{d}x \sin(ax) \qquad \text{(ii)}\quad \int \mathrm{d}a \sqrt{a+3} \qquad \text{(iii)}\quad \int_3^6 \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad \text{(iv)}\quad \int_0^4 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+9}}$$

$\boxed{2}$ Bearbeiten Sie **Aufgabe II**.
Berechnen Sie dabei die Stammfunktion des Integrals mit dem Befehl `int`. Ignorieren Sie hierbei vorerst die Nebenbedingungen für die Parameter a, b und c.

Benutzen Sie nun das Kommando `assume`, um Maple diese Nebenbedingungen mitzuteilen. Führen Sie nun das `int`-Kommando erneut aus. Was hat sich geändert?[1]

Aufgabe II Substitutionsregel
Zeigen Sie durch Integration, dass

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}, \qquad \text{falls} \quad a<0 \quad \text{und} \quad b^2-ac>0.$$

[1] Die beiden Ergebnisse stimmen für die komplexen Versionen der vorkommenden Funktionen natürlich überein.

Analytische Lösungen von DGLn, Grenzwertbildung, Reihenentwicklung

$\boxed{3}$ Bearbeiten Sie **Aufgabe III**.

a) Benutzen Sie `dsolve`, um die Differentialgleichungen (4) für die Geschwindigkeitskomponenten $v_x(t), v_z(t)$ zu lösen:[2].

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_x(t) = -k \cdot v_x(t) \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_z(t) = -k \cdot v_z(t) - g \tag{1}$$

mit der Randbedingung $v_x(0) = v_0 \cos\theta$ bzw. $v_z(0) = v_0 \sin\theta$.

b) Benutzen Sie `dsolve`, um die beiden Differentialgleichungen für $r_x(t)$ und $r_z(t)$ zu lösen.

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r_x(t) = -k \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r_x(t) \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r_z(t) = -k \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r_z(t) - g \tag{2}$$

mit der Randbedingung

$$r_x(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}r_x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 \cos\theta \qquad \text{bzw.} \qquad r_z(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}r_z}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 \sin\theta. \tag{3}$$

Extrahieren Sie danach mit `rhs` oder wie in der Vorlesung demonstriert nacheinander mit Hilfe von `subs` die Lösungen für diese beiden Komponenten von $\vec{r}(t)$.

Informieren Sie sich mit `?plot, parametric`, wie Sie Bahnkurven plotten können, und plotten Sie diese für die Parameter $g = 9.81$, $k = 0.1$, $v_0 = 100$ und $\theta = \pi/6$.

Lösen Sie nun die Differentialgleichungen direkt numerisch und plotten Sie die Lösung mit `odeplot`.

c) Den Grenzwert kann Maple mit `limit` berechnen, wenn $k > 0$ gesetzt ist. Das erreichen Sie bequem mit der `assuming`-Direktive, die diese Eigenschaft von k nur lokal für diesen einen Befehl setzt, anstatt global für alle Rechnungen.

d*) Zeigen Sie den angegebenen Zusammenhang durch Grenzwertbildung $k \to 0$. Berechnen Sie durch Reihenentwicklung um $k = 0$ (mit `series`) den ersten Korrekturterm.

Aufgabe III Schiefer Wurf

Ein Massenpunkt wird unter dem Winkel θ zur Horizontalen hochgeworfen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Massenpunkt am Ort $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)^T$ und der Betrag der Geschwindigkeit sei $|\vec{v}(0)| = v_0$. Infolge des Luftwiderstandes ist die Beschleunigung durch $\vec{a}(t) = -k\vec{v}(t) - g\vec{e}_z$ gegeben.

Durch Integration der Gleichung

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}(t) \tag{4}$$

erhalten Sie zunächst $\vec{v}(t)$ und dann $\vec{r}(t)$. Die jeweiligen Integrationskonstanten sind durch die Vorgabe von $\vec{v}(0) = v_0(\cos\theta, 0, \sin\theta)^T$ und $\vec{r}(0)$ festgelegt.

A) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Massenpunktes als Funktion der Zeit.

B) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ des Massenpunktes und skizzieren Sie diese.

C) Zeigen Sie, dass der Massenpunkt im Limes $t \to \infty$ eine endliche Grenzgeschwindigkeit erreicht und berechnen Sie deren Betrag.

D) Zeigen Sie, dass für kleinen Luftwiderstand ($k \to 0$) die Höhe annähernd durch

$$r_z(t) = v_z(0)t - \frac{gt^2}{2}$$

gegeben ist.

---

[2] Es soll dabei für jede Komponente eine Differentialgleichung aufgestellt werden. In dieser Aufgabe sollten keine Vektoren verwendet werden.

3D-Plots von Bahnkurven, Norm von Vektoren

$\boxed{4}$ Bearbeiten Sie **Aufgabe IV** mit Maple. Beachten Sie dazu die folgenden Hinweise:

a) Definieren Sie die gegebene Raumkurve als `Vector` von Ausdrücken. Weisen Sie mit `eval` den vorkommenden Parametern sinnvolle Werte zu und speichern Sie das Ergebnis in einem zweiten Vektor. Diesen können Sie nun mit `spacecurve` aus dem Package `plots` plotten lassen (vorher `with(plots)` aufrufen!).

b) Für die Berechnung der zeitlichen Ableitung des Vektors braucht Maple leider das zusätzliche Paket `VectorCalculus`.

c) `Norm(expr)` aus dem Paket `VectorCalculus` berechnet den Betrag (die euklidische Norm) eines Vektors, und nimmt dabei implizit reelle Vektoren an[3].
Das Package `LinearAlgebra` stellt auch die Funktion `Norm` zur Verfügung, wobei man durch `Norm(expr,2)` explizit die euklidische Norm spezifizieren muss. Hier müssen Sie Maple mit `assume` mitteilen, dass alle vorkommenden Parameter reell sind und $R > 0$ gilt. Dann erzeugt `simplify` aus dem Betrag wirklich einen einfacheren Ausdruck.

Aufgabe IV Teilchen im Magnetfeld
Ein elektrisch geladenes Teilchen bewegt sich in einem räumlich und zeitlich konstanten Magnetfeld. Unter dem Einfluss der Lorentz-Kraft beschreibt das Teilchen eine Bahnkurve, welche durch folgende Parameterdarstellung gegeben wird:

$$x(t) = R\cos(\omega t), \qquad y(t) = R\sin(\omega t), \qquad z(t) = h\frac{\omega t}{2\pi}$$

A) Skizzieren Sie die Bahnkurve.
B) Geben Sie die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren an.
C) Bestimmen Sie den Betrag der Geschwindigkeit

[3] d.h. bei komplexen Vektoren sind die Ergebnisse falsch!

Lineare Algebra, Matrizenrechnung, Eigenwerte, Eigenvektoren, LGSe

$\boxed{5^*}$ Bearbeiten Sie **Aufgabe V** mit Hilfe des `LinearAlgebra` Package. Beachten Sie die weiteren Hinweise zu den Teilaufgaben:

a) Das Matrix-Vektor-Produkt wird mit `.` ausgeführt, z.B. `C:=A.B;`. Mit `Transpose` lassen sich auch Zeilenvektoren in Spaltenvektoren überführen.

b) Die 3×3-Einheitsmatrix erhalten Sie mit `Matrix(3,3,shape=identity)`. (Ähnlich erhalten sie viele andere spezielle Matrizen.)

c) Die Determinante berechnen Sie mit `Determinant`. Vergleichen Sie das Polynom mit der Ausgabe von `CharacteristicPolynomial` von A.

d) Bestimmen Sie die Nullstellen des charakteristischen Poynoms mit `solve`, vergleichen Sie das Ergebnis mit der Ausgabe von `Eigenvalues` für A.

Aufgabe V Matrizenrechnung

A) Berechnen Sie die Produkte AB und BA:

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{(ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ist die Multiplitkation von Matrizen kommutativ? (D.h., gilt $AB - BA = 0$?)

B) Berechen sie $B = A - \lambda \mathbb{1}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{1} \text{ die Einheitsmatrix ist.}$$

C) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix B.

D) Bestimmen Sie die drei Lösungen für λ der Gleichung $\det B = 0$.